

目 录

引言	1
一、问题的提出	2
二、矩阵对策的数学模型	5
三、混合扩充	14
四、一种求解的简便方法	27
五、线性规划法	40
六、矩阵对策的图解法	44
练习题	48

引 言

早在1912年, E. Zermelo 用集合论的方法研究过下棋, 他著有《关于集合论在象棋对策中的应用》。之后, 法国数学家 Borel 在1921年, 也研究过下棋时的一些个别现象, 并且引入了“最优策略”的概念。本世纪四十年代以来, 由于生产与战争的需要, 运筹学的各学科纷纷出现。特别是战争中兵力的调动、兵力部署、监视对方、侦察对方兵器等活动, 迫切要求战争的指挥者拿出最好方案, 用已有的条件去取得较大的胜利, 于是对策论的数学模型很快形成了。当时, 各参战国组织了大批科学家参加这项研究工作。

1944年, J. von Neumann 和 O. Morgenstern 把这一工作提高到一个新水平。他们合著了《对策论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior)。从此, 对策论的研究才系统化与公理化。

矩阵对策, 是整个对策论的研究基础。不管是理论研究, 还是生产实践, 都不能越过矩阵对策这一个“第一道大门”。近代对策论的研究, 其结果再深入, 也无法摆脱矩阵对策这样一个母体。矩阵对策又以研究二人对策为主题, 策略的选取主要是研究有限情况。

我国劳动人民很早就认识了对策的问题, 虽然没有完整的数学体系, 没得出一套完整的数学方法, 然而这种模型早就出现了。所谓的“齐王赛马”就是一个非常典型的例子; 再如, 很早就出现了“棋谱”, 也都是研究对策的萌芽, 只不过没有系

统化和数学化罢了。

近几年来，对策论发展很快，例如，随机微分对策，就被应用到航天技术上。当然，对策论的某些理论上的研究成果，目前在生产与技术方面还用不上（在矩阵对策里，这种现象较少；在无穷对策中就很多，例如列紧对策，生产上就不易找到应用的模型），尽管如此，对策论的研究并未因此而受到影响，相反，由于理论上这部分内容较完整，因而发展的速度更快，甚至研究出了不少新的意想不到的成果。

一、问题的提出

日常生活中，我们可以看到一些相互之间的竞争、比赛性质的现象，如下棋、打扑克和球类比赛等等。竞争的双方都各有长处，各自都有一些不足，又各有特点。在竞赛的过程中，双方都在想方设法发挥自己的长处，尽最大可能争取竞赛后的较好的结果。

除了上述体育比赛外，军事上，战争也可以看成是竞争，是一种你死我活的斗争。此外，还有些现象也可以看成是一种竞争。如在运输方面，由于运输工具的不同，能够服务的项目也不同，从而创造的价值也就不同。作为生产指挥者，在安排时，必然是希望充分发挥现有运输能力，最大限度地减少消耗，去争取创造最大的价值。

在这里，运输的指挥者（或运输部门）看成是竞赛的一方，而被服务的单位可看成是竞赛的另一方。对被服务单位来说，他们希望付出较少的代价，得到较满意的服务。

再如，在工业生产方面，工厂中拥有一定数量的设备，能

加工不同类型的产品，不同设备单位时间内创造的价值不一样，消耗也不一样。从企业管理的角度来看，就是如何充分发挥其设备能力，减少消耗，去争取创造最多的价值。

在这里，工厂指挥者可看成是一方，自然现象的消耗、成本损失等看成是另一方。这样，两者之间也可以看成是一种竞争现象。

诸如此类的问题还很多，在农业方面，如合理施肥、农药除虫等方面，都有类似的问题。

形形色色的竞争现象中，可以抽象出哪几个本质的东西呢？

1. 首先，竞争总得有对立面。例如象棋比赛中，对奕的两位象棋运动员即是比赛的对立面（或称为“对手”）；一场战争中，交战的双方就是斗争的对立面；生产斗争中，常常是人类和大自然成了对立面，等等。我们把介入竞争的对立面，称为局中人。

2. 各局中人在竞争中总希望取得尽可能大的胜利，谁也不希望自己失败，至少不要败得很惨。这样，各方都在想方设法选择对付对手的“办法”，或说是选取一种“着法”，我们把这种“办法”（或“着法”）称为策略。

这里所谓策略，是指局中人在整个竞争过程中的对付对手的办法，并不是指竞争中某一步所采用的办法。如在下象棋中，“当头炮”只是作为一个策略的一个组成部分，并非一个策略。

局中人的的一切可能的策略，组成该局中人的策略集合。本书中，只讨论策略集合中含有限个策略的情况。

3. 竞争的结局，或是表现为胜负（输赢），或是表现为得失。这种结局称为一种“赢得”（或“支付”）。

这种竞争现象正是对策论所要研究的,称为对策现象,而上述三点则为对策的三要素.

当然,为了得到一种较好的结局,局中人如何选取策略是很重要的,下面以“齐王赛马”为例加以说明.

战国时期,齐国的国王与国内一个名叫田忌的大将进行赛马.双方约定,各自出三匹马,分别为三个等级的——即一等马(好的)、二等马(中等的)、三等马(差的)各一匹.比赛时,每次双方各从自己的三匹马中任选一匹来比,输者得付给胜者一千两黄金,一回赛三次,每匹马都参加.这里,局中人自然是齐王和田忌,两局中人的策略集合则为各自三等级马的全排列,结局是某一局中人赢得黄金一千两或三千两.

当时,三种不同等级的马相差非常悬殊,而同等级的马中,齐王的马比田忌的马要强.这样,如果齐王和田忌都是一、二、三等马依次参赛的话(即策略同为:一等马先参赛,其次二等马参赛,最后三等马参赛),田忌就得输三千两黄金.这时,田忌的朋友给他出了个主意,让田忌用三等马去与齐王的一等马比赛,一等马对齐王的二等马,二等马对齐王的三等马.即田忌的策略是三等马先参赛,一等马次之,二等马最后,用以对付齐王的一、二、三等依次参赛.这样,结局是齐王非但没有赢得,反而输了一千两黄金.这个例子说明,局中人选取一个好策略至关重要.至于这种好策略是否能找得到?运用什么方法去找?这都是对策论里所要解决的问题,本书也将适当予以介绍.

下面再介绍几个概念:

从上述提出的问题来看,不管是赛球、下棋(可以是象棋,也可以是国际象棋),还是齐王赛马,这种双方竞争的对策称为二人对策.在二人对策中,一个局中人的赢得等于另一局

中人的输出时,称这类二人对策为二人零和对策,赢得的数字称为对策的值.例如,在上述齐王赛马的例子中,每当齐王赢得一千两黄金时,就可看成是他的赢得为+1,这时田忌的赢得看成是-1;如果齐王输了一千两黄金,就看成它的赢得为-1,这时田忌的赢得为+1.于是,在对策的结局,双方的赢得之和等于零.这就是“零和”对策称呼的来历.

二、矩阵对策的数学模型

我们继续来讨论齐王赛马的例子.以 $\alpha_i(1, 2, 3)$ 表示齐王先用一等马,再用二等马,最后用三等马参赛.于是,齐王共有如下六个策略:

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 2, 3), \quad \alpha_2(1, 3, 2), \\ \alpha_3(2, 1, 3), \quad \alpha_4(2, 3, 1), \\ \alpha_5(3, 2, 1), \quad \alpha_6(3, 1, 2); \end{aligned}$$

同理,田忌也有六个策略:

$$\begin{aligned} \beta_1(1, 2, 3), \quad \beta_2(1, 3, 2), \\ \beta_3(2, 1, 3), \quad \beta_4(2, 3, 1), \\ \beta_5(3, 2, 1), \quad \beta_6(3, 1, 2). \end{aligned}$$

齐王的策略集合 S_1 含有六个元素,记为:

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\};$$

田忌的策略集合 S_2 也含有六个元素,记为:

$$S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6\}.$$

列一个表,表示齐王的赢得(单位:千两黄金):

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	3	1	1	1	1	-1
α_2	1	3	1	1	-1	1
α_3	1	-1	3	1	1	1
α_4	-1	1	1	3	1	1
α_5	1	1	-1	1	3	1
α_6	1	1	1	-1	1	3

如果只考虑数字表,写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

在数学中,这可以看成是一个矩阵^①.由于它是齐王赢得表中的数字依次抽象出来的,所以这个矩阵可称为齐王的赢得矩阵.对于二人零和对策,局中人I的赢得矩阵给定后,两局中人就

① 将 $m \times n$ 个数字 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ 排成 m 行(横排是“行”)、 n 列(纵排是“列”)的矩形表:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

称为 m 行 n 列的矩阵,可以简记成 $A = (a_{ij})$, 其中 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$, 也可以记成 $A_{m \times n}$.

对于两个矩阵 $A_{m \times n} = (a_{ij})$ 、 $B_{m \times n} = (b_{ij})$, 当且仅当所有的元素对应相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ 时, 才认为这两个矩阵是相等的: $A = B$.

便于各自考虑选取最优策略,以谋取最大的赢得.

为了表述方便,以后,当我们给定一个对策时,如果局中人 I 的策略集合记为 S_1 ,局中人 II 的策略集合记为 S_2 ,局中人 I 的赢得矩阵是 A ,这时我们把这个对策记为 Γ ,具体的写为

$$\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\} \quad \text{或} \quad \Gamma = \{S_1, S_2, A\}.$$

有限二人零和对策又称为矩阵对策.

下面,我们通过几个再简单些的例子,用以说明如何来选取最优策略.

[例 1] 对于一个矩阵对策 $\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\}$, 其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\},$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

求双方的最优策略,并求对策的值?

解 由 A 可以看出,局中人 I 的最大赢得是 9,就是说局中人 I 总希望自己取得 9,就得出 α_3 参入对策.然而,局中人 II 也是在考虑,因为局中人 I 有出 α_3 的心理状态,于是局中人 II 就想出 β_3 参入对策,这样不仅不能使 I 得到 9,反而得输 10 (即赢得 -10). 同样, I 也会这样想, II 有出 β_3 的心理状态,于是 I 就会出 α_4 , 结果 II 不但得不到 10,反而要输 6.

这样一来,双方都必然要考虑,不冒风险,考虑到对方会设法使自己得到最小收入.所以就应当从最坏的方案中着手,去争取最好的结果.

对于局中人 I 来说,所有最坏的结果,即 A 中每一行的

最小数分别是:

$$-8, 2, -10, -3,$$

在这些最坏的情况中,最好的结果又是 2. 于是,局中人 I 要是出 α_2 参加对策,至少可以保证收入不会少于 2. 同样道理,对于局中人 II 来说,所有最坏的结果(即 A 中每一列的最大数,也是最多输掉的数)分别是:

$$9, 2, 6,$$

这些最坏的结果中,最好的结果(输得最小)是 2. 于是,局中人 II 要是出 β_2 参入对策,那么它最多输 2.

这就是说,局中人 I 的最优策略是 α_2 , 局中人 II 的最优策略是 β_2 ; 数值 2 就是对策 V 的值: $V=2$.

把例 1 的求解过程用数学式子写出来,就是:从每一行里求出最小数,可写成

$$\begin{aligned}\min\{-6, 1, -8\} &= -8, \\ \min\{3, 2, 4\} &= 2, \\ \min\{9, -1, -10\} &= -10, \\ \min\{-3, 0, 6\} &= -3;\end{aligned}$$

再从这些最小的数中取最大的,可写为

$$\max\{-8, 2, -10, -3\} = 2.$$

对于局中人 II 来说,从每一列里取最大的,可写为

$$\begin{aligned}\max\{-6, 3, 9, -3\} &= 9, \\ \max\{1, 2, -1, 0\} &= 2, \\ \max\{-8, 4, -10, 6\} &= 6;\end{aligned}$$

再从这些最大的数中取最小的,就是

$$\min\{9, 2, 6\} = 2.$$

一般地,如果对策 V 的赢得矩阵 A 为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对局中人 I 来说, 对 A 的每一行取其中的最小值 $\min_j a_{ij}$ ($i=1, 2, \cdots, m$), 再从这些最小值中取最大值, 得

$$\max_i \min_j a_{ij};$$

对局中人 II 来说, 对 A 的每一列取其中的最大值 $\max_i a_{ij}$ ($j=1, 2, \cdots, n$), 再从这些最大值中取最小值, 得

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

如果

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*, j^*},$$

则 α_{i^*} 、 β_{j^*} 分别为局中人 I、II 的最优策略, 且这一对策的值 V_F 即为

$$V_F = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

为了表述方便, 对于局中人 I 用 α_i , 局中人 II 用 β_j 进行对策, 我们称 (α_i, β_j) 为一个局势. 对于能使

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

的 α_{i^*} 、 β_{j^*} 构成的局势 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$ 称为对策的解, 而 α_{i^*} 、 β_{j^*} 分别称为局中人 I 与 II 的最优纯策略. 显然, 在例 1 中, 对策的解为 (α_2, β_2) , 对策的值为 $V=2$.

【例 2】 设有一个矩阵对策, 局中人 I 的赢得矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求双方的最优纯策略, 并求对策的值.

解 首先求出

$$\max_i \min_j a_{ij} = 1,$$

再求出

$$\min_j \max_i a_{ij} = 1,$$

由于 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{12} = 1$, 所以局中人 I 的最优纯策略是 α_1 , 局中人 II 的最优纯策略是 β_2 , 对策的值 $V = 1$.

下面再来看一个实例.

[例 3] 山东省济南市东郊人民公社计划种茄子、辣椒、大葱、大白菜等十一种蔬菜, 种植面积为 1300 亩, 但感到水、肥均不足, 根据各种蔬菜的收获量及市场价格, 应怎样安排各种蔬菜的种植面积, 使既能满足市场供应, 又保证公社能获得最大的收入.

解 首先, 把问题适当简化, 以利归结为一个数学问题. 我们可以把水分成两种情况: 足与不足, 把肥分成三种情况: 足够、稍缺、甚缺, 这样投入每一块田的水、肥结合起来便有六种不同情况. 另外, 根据市场实际需要和种植情况, 将各种蔬菜的种植面积分成五种不同方案, 并按市价算出总收入数字 (单位: 元) 列成下表:

方 案	自 然 条 件					
	一	二	三	四	五	六
甲	192460	235120	278200	156360	197520	242840
乙	189560	231700	273630	155620	196600	239710
丙	192060	234799	277095	158235	198580	243280
丁	194370	237218	280751	158475	199813	245362
戊	194360	238990	281385	157835	199750	246020

这就把问题归结为二人零和对策, 局中人分别为人和大自然, 人有五种策略, 大自然有六种策略, 把上表数字抽象出来就是人的赢得矩阵.

上述赢得矩阵 $A = (a_{ij})$ 是一个有五行、六列的矩阵, 可求得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 158475,$$

即采用方案丁, 其总收入决不少于 158475 元, 而有达到 280751 元的希望.

[例 4] 给定一个矩阵对策 I , 其赢得矩阵是

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

由于

$$\min_j a_{1j} = 5, \min_j a_{2j} = -1, \min_j a_{3j} = 5, \min_j a_{4j} = 0.$$

在这些最小中去取最大, 有

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i^*j^*} = 5, \quad i^* = 1, 3; \quad j^* = 2, 4.$$

又由于

$$\max_i a_{i1} = 8, \max_i a_{i2} = 5, \max_i a_{i3} = 7, \max_i a_{i4} = 5.$$

在这些最大中去取最小, 是

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = 5, \quad i^* = 1, 3; \quad j^* = 2, 4.$$

显然有

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 5.$$

故 (α_1, β_2) 、 (α_3, β_4) 、 (α_1, β_4) 、 (α_3, β_2) 四个局势都是对策 I 的解, 即

$$(\alpha_1, \beta_3) = (\alpha_1, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_4) = (\alpha_3, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_4).$$

由例 4 可以看到, 对策的解可以不唯一, 当然它的值是唯一的.

对于例 4 这样的对策, 当对策的解不唯一时, 它有两条重要性质:

1. 无差别性. 即 (α_1, β_2) 与 (α_3, β_4) 是两个解, 那末也有

$$a_{12} = a_{34}.$$

一般说来, $(\alpha_i, \beta_k), (\alpha_{i'}, \beta_{k'})$ 是两个解, 那末也有

$$a_{ik} = a_{i'k'}.$$

2. 可换性. 由于 $(\alpha_1, \beta_2), (\alpha_3, \beta_4)$ 是两个解, 那末 (α_1, β_4) 与 (α_3, β_2) 也都是解. 一般说来, 若 $(\alpha_i, \beta_k), (\alpha_{i'}, \beta_{k'})$ 是两个解, 那末 $(\alpha_i, \beta_{k'})$ 与 $(\alpha_{i'}, \beta_k)$ 也都是对策的解.

最后, 我们来讨论, 是否只要给定一个对策 Γ , 就一定有解呢? 上述例 1~例 4 都是有解的, 但也有没有解的对策. 例如, 前述齐王赛马的对策, 便是没有解的, 因为在齐王的赢得矩阵 A 中, 可以算出

$$\begin{aligned} \max_i \min_j a_{ij} &= -1, \\ \min_j \max_i a_{ij} &= 3, \end{aligned}$$

显然, 这里的

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

所以, 齐王赛马的对策中, 双方没有最优纯策略.

什么情况下给定的对策有解呢?

定理 对策 $\Gamma = \{I, II; S_1, S_2, A\}$ 有解的充分必要条件是: 存在一个纯局势 (α_i, β_j) , 对一切 $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, 都有

$$a_{ij} \leq a_{ij_0} \leq a_{i_0j}.$$

证明 先证充分性. 由于对一切 i, j 均有

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j},$$

故有

$$\max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq \min_i a_{i^*j},$$

而

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*},$$

$$\min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij},$$

从而可得

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*} \leq \max_i \min_j a_{ij}.$$

另外, 显然有 ●

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

将上两式比较, 即得

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*},$$

这就证明了对策 I 有解 $(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$, 且其值为 $a_{i^*j^*}$.

现在来证明必要性. 既然对策 I 有解, 假设 $\min_j a_{ij}$ 在 $i = i^*$ 时达到最大, $\max_i a_{ij}$ 在 $j = j^*$ 时达到最小, 即

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j},$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*},$$

而

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

从而有

$$a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij^*} \geq a_{ij^*};$$

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j}.$$

● 对于矩阵 $A = (a_{ij})$, 显然有 $\min_j a_{ij} \leq a_{ij}$, 从而 $\max_i \min_j a_{ij} \leq \max_i a_{ij}$. 由于上式右端包括了一切 j , 所以也有 $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$.

这就证得了

$$a_{ij*} \leq a_{i+j} \leq a_{i+j}$$

对一切 $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 成立. 定理完全得证.

三、混合扩充

前已指出, 如齐王赛马的例子, 就是一个没有解的对策. 再如下面的例子, 也是一个没有解的对策.

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\max_i \min_j a_{ij} = 2, \quad \min_j \max_i a_{ij} = 3,$$

故不满足 $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, 因而 Γ 没有解, 局中人 I 与 II 也就没有最优纯策略.

对于这种没有解的对策, 局中人又应如何选取策略参加对策呢? 这就得估计选取各个策略可能性的 大小来进行对策. 数学中, 把这种可能性大小用一个数字来表示, 称为概率. 例如, 以 30% 的可能性选取某个策略, 我们就说它以概率 $\frac{30}{100} = 0.3$ 选取某个纯策略.

对于例 1 来说, 假定局中人 I 以概率 x 选取纯策略 α_1 , 以概率 $1-x$ 选取 α_2 . 局中人 II 以概率 y 选取纯策略 β_1 , 以概率 $1-y$ 选取纯策略 β_2 . 于是, 对于局中人 I 来说, 他的期望赢得应当是

$$\begin{aligned}
E(x, y) &= 1 \cdot x \cdot y + 3 \cdot x \cdot (1 - y) \\
&\quad + 4 \cdot (1 - x) \cdot y + 2 \cdot (1 - x) \cdot (1 - y) \\
&= -4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

由上式可见, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $E(x, y) = \frac{5}{2}$. 就是说, 当局中人 I 以概率 $\frac{1}{2}$ 选纯策略 α_1 , 他的赢得至少是 $\frac{5}{2}$. 但是, 他并不能保证他的期望值超过 $\frac{5}{2}$. 这也是因为局中人 II 当取 $y = \frac{1}{4}$ 时, 会控制局中人 I 的赢得又不会超过 $\frac{5}{2}$. 因此, $\frac{5}{2}$ 是 I 的期望值. 同样, 局中人 II 只有取 $y = \frac{1}{4}$ 时, 才能保证他的输出不会多于 $\frac{5}{2}$. 于是, 对于例 1 来说, 局中人 I 分别都以概率 $\frac{1}{2}$ 选取 α_1 与 α_2 , 局中人 II 分别以概率 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 选取 β_1 与 β_2 , 这时对策的双方都会得到满意的结果. 以这样一种方式选取策略参加对策, 是双方的最优策略.

从刚才计算的结果, 也可看出:

$$E\left(x, \frac{1}{4}\right) \leqslant E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \leqslant E\left(\frac{1}{2}, y\right).$$

这里, 如果把 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 看成是一个局势, 显然, 与第 12 页定理中的充要条件是一致的.

把刚才解例 1 的方法推广到一般, 我们引出如下概念:

定义 设给定一个矩阵对策

$$G = \langle I, II; S_1, S_2, A \rangle,$$

其中

$$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, S_2 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\},$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

我们把纯策略集合对应的概率向量

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

与

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

分别称为局中人 I 与 II 的混合策略.

这里, x_i 看成是 I 选取 α_i 的概率; 同理, y_j 看成是 II 选取 β_j 的概率.

在纯策略情况下, 对策的解可以看成是局中人以概率为 1 去选取某个纯策略.

为了方便, 我们把这种混合策略也简称为策略.

如果局中人 I 选取的(混合)策略为 X ,

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

局中人 II 选取的(混合)策略为 Y ,

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

时, 值

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

称为局中人 I 的赢得, 并叫做数学期望值; 而 (X, Y) 称为混合局势.

类似地, 当存在 (X^*, Y^*) , 使

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

对一切 X 与 Y 成立, 我们就称 X^*, Y^* 分别是局中人 I 与 II 的最优(混合)策略; $E(X^*, Y^*)$ 称为对策在混合意义下的值(也简称为对策的值); (X^*, Y^*) 称为对策的解.

局中人 I 的所有混合策略的全体构成一个集合 S_1^* , 局中人 II 的所有混合策略的全体构成集合 S_2^* . 那么, 以 S_1^* 与 S_2^* 为策略集合的对策, 叫混合扩充, 即把对策

$$I^* = \langle I, II; S_1^*, S_2^*; E \rangle$$

称为对策 $I = \langle I, II; S_1, S_2; A \rangle$ 的混合扩充. 同样, 如果成立:

$$\max_X \min_Y E(X, Y) = \min_Y \max_X E(X, Y) = V,$$

值 V 叫做对策 I 的值.

矩阵对策混合扩充一定有解 (X^*, Y^*) . X^* 与 Y^* 分别称为局中人 I 与 II 的最优策略.

定理 如果矩阵对策 I 的值是 V , 那末以下两组不等式的解就是局中人 I 与 II 的最优策略:

$$1^\circ \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V, \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

$$2^\circ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V, \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

这个定理的证明较繁, 本书从略, 以下通过例题来说明该定理的应用.

[例 2] 给定一个矩阵对策 I , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 假设局中人 I 以概率 x_1, x_2 与 x_3 分别选取 α_1, α_2 与 α_3 ; 局中人 II 以概率 y_1, y_2 与 y_3 分别选取 β_1, β_2 与 β_3 . 于是, 问题化为要解如下的两组不等式组

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \geq V, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq V, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \geq V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3. \end{cases}$$

以及

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 \leq V, \\ y_1 + y_2 + 5y_3 \leq V, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

为解 1° 与 2° , 我们先取等号, 看看是否可解出这两组方程来.

对于 1° , 取等号得线性方程组, 解得:

$$x_1 = \frac{-12}{-50} V = \frac{6}{25} V,$$

$$x_2 = \frac{-8}{-50} V = \frac{4}{25} V,$$

$$x_3 = \frac{-6}{-50} V = \frac{3}{25} V.$$

再利用 x_1, x_2 与 x_3 是概率, 和为 1, 可知

$$\frac{1}{25}(6+4+3)V=1,$$

从而应有

$$V = \frac{25}{13}.$$

进一步, 代入 x_1, x_2, x_3 关于 V 的表达式中, 可求得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{4}{13}, \quad x_3 = \frac{3}{13}.$$

同理,

$$y_1 = \frac{-12}{-50} V = \frac{6}{25} V = \frac{6}{13},$$

$$y_2 = \frac{-6}{-50} V = \frac{3}{25} V = \frac{3}{13},$$

$$y_3 = \frac{-8}{-50} V = \frac{4}{25} V = \frac{4}{13}.$$

解出了 1° 与 2° 后, 可知局中人 I 的最优策略为

$$X^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right);$$

局中人 II 的最优策略为

$$Y^* = \left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13} \right).$$

对策的值

$$V = \frac{25}{13}.$$

以下再举一个工业生产的例子. 工厂中的不同设备(机床)可以看成是一个纯策略. 可以看成是对策的一方的策略. 要加工的产品(零件)可以看成是对策的另一方的策略. 对策的双方可以认为是加工单位与被加工单位. 运筹学里叫服务单元与被服务单元.

[例 3] 有一个工厂, 用三种不同的设备 α_1 、 α_2 、 α_3 加工三种不同的产品 β_1 、 β_2 、 β_3 . 已知这三种机床分别加工三种产品时, 单位时间内创造的价值列表于下:

	β_1	β_2	β_3
α_1	4	-1	5
α_2	0	5	3
α_3	3	3	7

其中出现负值, 是由于设备消耗远远大于创造出来的价值. 在这样的条件下, 求出一组合理的加工方案.

解 这一问题可以化为一个矩阵对策，并且在纯策略意义下是无解的，于是进行混合扩充，假定工厂采用设备 α_1 加工产品的概率是 x_1 ，采用设备 α_2 与 α_3 的概率分别是 x_2 与 x_3 ，又，产品 β_1 、 β_2 与 β_3 被接受加工的概率分别是 y_1 、 y_2 与 y_3 。于是，完全类似于例 3，解如下的两不等式组：

$$1^\circ \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_3 \geq V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3. \end{cases}$$

以及

$$2^\circ \quad \begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 \leq V, \\ 5y_2 + 3y_3 \leq V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

对于这两不等式组，都取等号是不可能的，因为

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 = V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = V \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 = V, \\ 5y_2 + 3y_3 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 = V \end{cases}$$

均无正数解。因此，必须考虑有的式子取等号，有的式子不取等号，再行试算。若能求得一组解，问题便得到解决。但是，这一问题要是带着不等号去求解的话，将是很麻烦的事，不知要花多大的气力，也不一定能找到合适的解。为此，

我们先给出以下的定理.

定理 给定一个矩阵对策 Γ , 赢得矩阵为 $A_{m \times n}$, 假定对策的值是 V , 局中人 I 与 II 的最优策略分别为

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$$

与

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*).$$

当 $E(i, Y^*) < V$ 对任何的 i 都成立, 则必有

$$x_i^* = 0;$$

当 $E(X^*, j) > V$ 对任何 j 都成立, 则必有

$$y_j^* = 0.$$

证明 采用反证法. 假定对于某些 H 有

$$E(H, Y^*) < V$$

且

$$x_H^* \neq 0.$$

这时, 就用 x_H^* 乘上式, 得

$$E(H, Y^*) x_H^* < x_H^* V.$$

还因为 $k = 1, 2, \dots, H-1, H+1, \dots, m$ 时, 有

$$E(k, Y^*) \leq V,$$

因此也有

$$E(k, Y^*) x_k^* \leq x_k^* V.$$

对上式两端取和, 就有

$$\sum_{i=1}^m E(i, Y^*) x_i^* < \sum_{i=1}^m x_i^* V,$$

或是

$$E(X^*, Y^*) < V \sum_{i=1}^m x_i^* = V.$$

这与 (X^*, Y^*) 是解的假设相矛盾, 因此必须是

$$x_H^* = 0.$$

同理, 可以证明定理的后一部分.

下面, 我们运用这个定理, 来解刚才的例 3.

先作如下的试验: 先考虑以下的不等式组

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_3 > V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = V, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

从第二、三式消去 x_2 , 得

$$4x_1 + 3x_3 = 1,$$

此式再与试验的方程组中的第一、三式相比较, 有

$$V < 1$$

与

$$2x_1 + 4x_3 = V - 3 < 0,$$

显然这是不合理的(因为 x_1 、 x_2 均为非负, 故上式为负是不可能的),

这就说明, 用第一式不取等号, 其他两式取等号, 是不允许的. 于是, 必须再改换另一组. 不妨再作如下的试验: 取

$$1^\circ \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_3 = V, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = V, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 > V; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

以及

$$2^\circ \quad \begin{cases} 4y_1 - y_2 + 3y_3 < V, \\ 5y_2 + 3y_3 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 = V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

由第 21 页的定理可知, 在这样的假设下, 必须有

$$y_3^* = 0, \text{ 对应的 } 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq V;$$

$$x_1^* = 0, \text{ 对应的 } 4y_1 - y_2 + 3y_3 \leq V.$$

这样, 方程组 1° 与 2° 就可变成如下的方程组:

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad \begin{cases} 3x_3 = V, \\ 5x_2 + 3x_3 = V \end{cases} \\ \text{与} \\ 2^\circ \quad \begin{cases} 5y_2 = V, \\ 3y_1 + 3y_2 = V. \end{cases} \end{array}$$

解得

$$x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1, \quad y_1^* = \frac{2}{5}, \quad y_2^* = \frac{3}{5};$$

$$V = \frac{14}{2}.$$

因此, 局中人 I (工厂服务单位) 的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = (0, 0, 1),$$

局中人 II (被加工的产品单位) 的最优策略是

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right).$$

这说明, 工厂在给定的价值表的情况下, 不愿意采用设备 α_1 与 α_2 加工产品. 因为如用这两种设备加工那样的产品, 创造的价值远不能补给机器的消耗损失 (如电力使用, 机械磨损, 工人工资, 企业管理费用等). 这时, 工厂决定这些设备不投入使用是合理的.

另一方面, 从产品加工的单位来看, 他们总是希望加工单位不要价格太高, 希望付出的代价越少越好. 特别是, 他更希望某工厂给他加工某项产品后, 非但不向他要钱, 反而送给他一些副产品, 这当然是被服务的单位非常乐意的事.

这个例题充分说明, 企业管理中如何筹划设备的使用, 是一个很值得研究的问题.

[例 4] 对齐王赛马的例, 求齐王与田忌双方各自的最优策略.

解 由于齐王的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

这个对策在纯策略意义下没有解, 因此必须进行扩充. 解以下的两组不等式:

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \geq V, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \geq V, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \geq V, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 \geq V, \\ \sum_{i=1}^6 x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 \leq V, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 - y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 - y_2 + 3y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq V, \\ -y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + 3y_5 + y_6 \leq V, \\ y_1 + y_3 + y_5 - y_4 + y_6 + 3y_6 \leq V, \\ \sum_{j=1}^6 y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

对于 1° 与 2° , 都完全取等号时, 将所有式相加, 可知

$$6(x_1 + x_2 + \cdots + x_6) = 6V,$$

$$6(y_1 + y_2 + \cdots + y_6) = 6V.$$

故知

$$V = 1.$$

另一方面, 我们又知道, 双方各自选取自己的纯策略的可能性都是相等的, 从而可以观察到方程组 1° 的解为

$$x_i = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \cdots, 6;$$

2° 的解为

$$y_j = \frac{1}{6}, \quad j = 1, \cdots, 6.$$

显然既满足方程组的解, 又满足实际要求. 因此, 齐王的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right),$$

而田忌的最优策略是

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right);$$

对策的值是 1.

由此可以看出, 在整个比赛过程中, 双方如果都不存冒险想法, 总的结局仍是齐王赢得金子.

当然, 前曾指出, 在某局势下田忌可赢得千金, 但这只有在局中人 I 先把某一策略选定之后, 再明确告诉局中人 II 他用的是那一个策略, 这样, 局中人 II 当然就可有针对性地去选取自己的策略的情况下才有可能, 而这里的混合扩充, 是在双方都不能知道对方会用那一个纯策略的情况下才有意义.

也有那样的情况,在解方程 1° 与 2° 的过程中,有时候单从解方程无法确定 x_i 与 y_j , 还必须结合具体情况讨论, 才可求得其解.

[例 5] 给定一个对策 V , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求解与值.

解 列出 1° 与 2° :

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 \geq V, \\ x_1 + x_2 \geq V, \\ 2x_2 \geq V; \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1 + y_3 \leq V, \\ y_2 + 2y_3 \leq V; \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

如果在 1° 中取等号, 可知

$$1 = x_1 + x_2 = V.$$

又, 第三式与第一式相减, 得

$$x_1 = x_2,$$

故有

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

由 2° , 两式相加, 有

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 2V,$$

从而有

$$V=1,$$

又第一式与第二式相减, 得

$$y_3=y_1,$$

从而又知道

$$y_2=1-2y_1\geqslant 0,$$

即必须

$$y_1\leqslant \frac{1}{2}.$$

可是

$$y_1+y_2+y_3\leqslant \frac{1}{2}+y_2+\frac{1}{2}=1,$$

即

$$1\leqslant 1+y_2\leqslant 1,$$

所以必须是

$$y_2=0.$$

这就得到, 局中人 I 的最优策略为

$$\mathbf{X}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

局中人 II 的最优策略是

$$\mathbf{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

对策的值

$$V=1.$$

四、一种求解的简便方法

对于矩阵对策, 当赢得矩阵的阶数很大时, 求解、求值都是一件很困难的事, 有时甚至靠笔算是不可能的. 这样, 是否

可以设法给出一个普遍的方法，简化所有的求解与求值过程呢？

就一般对策而言，目前尚无更好的办法，甚至要找一个较好一点的普遍方法也是困难的。然而，对于具有某些特性的对策，简便的求值方法还是有的。下面通过一些实例，介绍对一些特殊情况的简便方法。

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ ，其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

求对策 Γ 的解与值。

解 由于 A 的第四行比第一行的对应元素都大，说明在对策的过程中，局中人 I 不会采用策略 α_1 ，这就可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_1 。又由于 A 的第三行比第二行的对应元素均大（或相等），因此又可以看作是局中人 I 以概率为 0 选取纯策略 α_2 。这说明局中人 I 最多能用到 α_3 、 α_4 、 α_5 ，因为他用这三个纯策略的任何一个收入都不会比用 α_1 、 α_2 小，从而局中人 I 在任何情况下都不会去用 α_1 与 α_2 。所以只需考虑如下的矩阵就可以了：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

另一方面，从局中人 II 的利益来看， β_3 是最不好的，肯定不能用。于是可看成是以概率为 0 选取 β_3 。而 β_2 又比 β_5

好, 因此任何情况下局中人 II 都不会舍去 β_2 而用 β_5 . 于是, 又可以看作是局中人 II 以概率为 0 选取 β_5 . 又由于 β_2 还比 β_4 好, 因此同样可以看作以概率为 0 选取 β_4 . 这样, 问题归结为考虑如下的矩阵了:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

又, 从 A_2 来看, 局中人 I 在任何情况下都不会用 α_5 . 于是余下的只是看如下的矩阵了:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

这样, 运用混合扩充的办法, 求解以下两组不等式

$$1^\circ \quad \begin{cases} 7x_3 + 4x_4 \geq V, \\ 3x_3 + 6x_4 \geq V; \\ x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \\ x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 7y_1 + 3y_2 \leq V, \\ 4y_1 + 6y_2 \leq V; \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

当我们取等号时, 由 1° 的两式相加, 有

$$10x_3 + 10x_4 = 2V,$$

从而得到

$$V = 5.$$

相应的

$$x_3^* = \frac{1}{3}, \quad x_4^* = \frac{2}{3}.$$

同理, 解 2° 可得到

$$y_1^* = \frac{1}{2}, \quad y_2^* = \frac{1}{2}.$$

于是, 对策 Γ 的解和值分别是:

$$X^* = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$$

$$Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right);$$

$$V = 5.$$

[例 2] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

求对策 Γ 的解与值.

解 由于第一行的对应元素都不超过第三行, 因此, 局中人 I 必然要用 α_3 代替 α_1 , 于是考虑以下矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

由于在 A_1 中, 第一列的对应元素都不小于第三列的对应元素, 于是, 局中人 II 必然不会采用 β_1 , 而用 β_3 代替. 所以转而考察如下矩阵:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

现在, 解下列两个不等式组:

1°

$$\begin{cases} 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq V, \\ 2x_2 + 4x_3 \geq V, \\ 4x_2 + 8x_4 \geq V; \\ x_i \geq 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

2°

$$\begin{cases} 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq V, \\ 2y_2 + 4y_3 \leq V, \\ 4y_2 + 8y_4 \leq V; \\ y_i \geq 0, \\ y_2 + y_3 + y_4 = 1. \end{cases}$$

我们先取等号, 由于 1° 中的第二式与第三式之和为

$$6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2V,$$

即

$$3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = V.$$

上式与 1° 中的第一式比较, 得

$$x_2 = 0.$$

所以

$$4x_3 = V, \quad 8x_4 = V.$$

故

$$x_3 = 2x_4.$$

从而有

$$x_3^* = \frac{2}{3}, \quad x_4^* = \frac{1}{3}.$$

于是有

$$X^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

同理, 也有

$$Y^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

对策的值为:

$$V = \frac{8}{3}.$$

【例 3】 给定一个矩阵对策 I ，其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求其最优策略及值.

解 对 A 来说, 由于第四列的元素比第一列及第三列的对应元素都大, 因此, 对局中人 II 来说, 肯定不会采用 β_4 的. 进一步, 也可肯定局中人 II 不会采用 β_3 的, 因 β_1 代替 β_3 与 β_4 会取得好的结果. 于是, 余下来就是考虑以下的矩阵了:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又, 从 A_2 中可以看出, 局中人 I 不会采用 α_1 , 而代替 α_1 的是 α_3 ; 而 α_2 又必然会被 α_4 所代替. 因此, 余下来就是只考虑以下的矩阵:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

又由 A_3 可以看出, 局中人 II 必然要用 β_1 , 而不用 β_2 . 从而, 余下的只是以下的矩阵

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再从 A_4 又可以看出来, 局中人 I 会用 α_3 , 而不去用 α_4 . 这样, 最后就找到了最优策略是

$$X^* = (0, 0, 1, 0),$$

$$Y^* = (1, 0, 0, 0).$$

对策的值

$$V=2.$$

这个例子表明, 先前讲的纯策略不扩充时的解, 只是扩充后的一个特例, 只不过是概率为 1 而取得了那个纯策略, 以概率为 0 选取其他的纯策略.

以下再介绍一种方法.

在一个矩阵对策中, 把矩阵的元素普遍加上一个数, 可使得对策的解不变, 只是值增了一个数. 我们还是通过一个例子来加以说明.

[例 4] 给定一个矩阵对策 I , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

求对策的解与值.

解 按前述方法, 就得解如下的两不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq V, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq V, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq V; \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \leq V, \\ -y_1 - y_2 + 3y_3 \leq V, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \leq V; \\ y_i \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

由这两组不等式, 我们取等号, 可解得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13},$$

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13},$$

$$V = -\frac{1}{13}.$$

如果把这一问题换成另一问题, 考虑另一个矩阵对策 Γ' , 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

这时, 解如下的两不等式组

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 \geq V, \\ 4x_2 \geq V, \\ 3x_3 \geq V, \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1 \leq V, \\ 3y_2 \leq V, \\ 4y_3 \leq V, \\ y_i \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

解这两组不等式, 我们取等号, 由 1° 有

$$12x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 6V + 3V + 4V,$$

可知 $V = \frac{12}{13}$. 于是很快就可解得

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13},$$

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13},$$

$$V = \frac{12}{13}.$$

可以看到, 这组解与先前那组解是完全一样的, 只是值差了一个 1. 其实, 后一个对策的矩阵与前一个矩阵之间的差别, 在于把前面的矩阵的每个元素都加了 1. 这就告诉我们, 可以在矩阵的每一元素普遍加上一个数, 用以简化计算.

这一方法可以推广到一般情形, 这就是下面的定理.

定理 给定两个矩阵对策:

$$\Gamma_1 = \langle S_1, S_2, I, I; (a_{ij}) \rangle,$$

$$\Gamma_2 = \langle S_1, S_2, I, II; (a_{ij} + a) \rangle,$$

其中 a 是一个常数, 则两个对策的解不变, 其值相差一个 a , 即

$$V_2 = V_1 + a,$$

其中 V_1 与 V_2 分别是对策 Γ_1 与 Γ_2 的值.

证明 设给定 Γ_1 的矩阵 A_1 为

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

对策 Γ_2 的矩阵为

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} + a & a_{12} + a & \cdots & a_{1n} + a \\ a_{21} + a & a_{22} + a & \cdots & a_{2n} + a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + a & a_{m2} + a & \cdots & a_{mn} + a \end{pmatrix}.$$

于是, $E_2(X, Y)$ 有

$$\begin{aligned} E_2(X, Y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a) x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a x_i y_j. \end{aligned}$$

又因为有下列式成立

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n ax_i y_j &= a \cdot \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i y_j \right) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^m \left(x_i \sum_{j=1}^n y_j \right) = a \cdot \sum_{i=1}^m x_i = a,\end{aligned}$$

因此有

$$E_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + a.$$

[例 5] 给定一个矩阵对策 Γ , 其赢得矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

求解及值.

解 对于 \mathbf{A} 来说, 含有最多的元素是 2. 于是, 根据上定理, 对 \mathbf{A} 的所有元素减去 2, 即得

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

从而转化为它的等价问题. 对 \mathbf{A}_1 , 只需解如下不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq V_1, \\ -4x_1 + 2x_2 \geq V_1, \\ 2x_1 + 4x_3 \geq V_1; \\ x_i \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 \leq V_1, \\ -3y_1 + 2y_2 \leq V_1, \\ 4y_3 \leq V_1; \\ y_i \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

解这两组不等式, 我们知道取等号是不行的, 必须取如下的两组

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 = V_1, \\ -4x_1 + 2x_2 = V_1, \\ 2x_1 + 4x_3 > V_1; \\ x_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} y_1 - 4y_2 + 2y_3 < V_1, \\ -3y_1 + 2y_2 = V_1, \\ 4y_3 = V_1; \\ y_1 \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

由 1° 与 2° , 当然有两个特定的解为

$$x_1 = 0, \quad y_3 = 0,$$

于是问题变成了解如下的两个方程组

$$\begin{cases} -3x_2 = V_1, \\ 2x_2 = V_1 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = V_1, \\ 4y_3 = V_1. \end{cases}$$

由 $4y_3 = V_1$ 可知 $V_1 = 0$, $x_2 = 0$, 所以有

$$x_3 = 1,$$

以及

$$3y_1 = 2y_2.$$

所以又有

$$y_1 = \frac{2}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{5}.$$

最后得到解为

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=1;$$

$$y_1=\frac{2}{5}, \quad y_2=\frac{3}{5}, \quad y_3=0.$$

而值 V 应当是

$$V_1+2=0+2=V,$$

即对策的值为 $V=2$.

[例 6] 给定一个矩阵对策 I , 其赢得矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

求解及值.

解 可将 A 变成

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

解两不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_2 + x_3 \geq V_1, \\ x_1 + 2x_3 \geq V_1, \\ 2x_1 + x_2 \geq V_1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq V_1, \\ 2y_1 + y_2 \leq V_1, \\ y_1 + 2y_2 \leq V_1, \\ y_1 \geq 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

我们先取等号. 将 1° 的三个式子相加, 可得 $V_1=1$. 于是又可解出:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

用同样的方法, 又可得到

$$y_1 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{3}.$$

故有原来对策的值为

$$V = V_1 \div 1 = 2.$$

[例 7] 有两个乒乓球队, 双方各自出三个队员, 对甲队来说赢得情况是

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

求这个对策的解.

解 对这个对策, 可以考虑如下的矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

解以下的两不等式组:

$$1^\circ \quad \begin{cases} 2x_1 & \geq V_1, \\ 4x_2 & \geq V_1, \\ 3x_3 & \geq V_1; \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} 2y_1 & \leq V_1, \\ 3y_2 & \leq V_1, \\ 4y_3 & \leq V_1; \\ y_1 + y_2 + y_3 & = 1, \\ y_1, y_2, y_3 & \geq 0. \end{cases}$$

由 1° 可知, 当取等号时, 有

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{4} + \frac{V_1}{3} = 1.$$

从而解得:

$$V_1 = \frac{12}{13},$$

$$x_1 = \frac{6}{13}, \quad x_2 = \frac{3}{13}, \quad x_3 = \frac{4}{13}.$$

同理, 可求得

$$y_1 = \frac{6}{13}, \quad y_2 = \frac{4}{13}, \quad y_3 = \frac{3}{13}.$$

所以, 最优解为

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{6}{13}, \quad \frac{3}{13}, \quad \frac{4}{13} \right),$$

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{6}{13}, \quad \frac{4}{13}, \quad \frac{3}{13} \right);$$

对策的值为

$$V_1 = \frac{12}{13}.$$

再将 1 加到 V_1 上, 则得原对策的值为

$$V = 1 + V_1 = 1 + \frac{12}{13} = \frac{25}{13}.$$

此解与第 17 页例 2 的结论完全一致, 可见采用这方法可简化计算.

五、线性规划法

我们已经知道, 对于扩充后的矩阵对策来说, 求最优解就是去解下述两不等式组:

$$1^{\circ} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

$$2^{\circ} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq V, \quad (i=1, 2, \dots, m);$$

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

这里的 V 是:

$$V = \max_{X^* \in S_1^*} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

也有如下的

$$V = \min_{Y^* \in S_2^*} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j.$$

如果作如下的变换: 对于 1° 来说,

$$x'_i = \frac{x_i}{V}, \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

于是, 1° 就成为:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_{i=1}^m x'_i = \frac{1}{V},$$

$$x'_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

这样, 就把问题归结为求一组满足约束条件:

$$1^{\circ'} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$x'_i \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

的解 $x'_i^* (i=1, 2, \dots, m)$, 使得目标函数

$$S(X'^*) = \sum_{i=1}^m x'_i^*$$

达到最小.

同样, 对于局中人 II 来说, 求最优策略问题可化为求满足约束条件:

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} y'_j \leq 1, \quad (i=1, 2, \dots, m); \\ & y'_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

的一组解 y'_i^* , 使得目标函数

$$S(Y'^*) = \sum_{j=1}^n y'_j^*$$

达到最大. 这里

$$y'_j = \frac{y_j}{V}, \quad (j=1, 2, \dots, n);$$

$$V = \min_{Y \in S_1^*} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j.$$

我们知道, 这就是线性规划的典型问题.

[例 1] 给定矩阵对策的赢得矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 用刚才讲过的理论, 把它化为以下的两个线性规划问题:

$$i) \quad \begin{cases} x'_1 + 4x'_2 + 3x'_3 \geq 1, \\ 3x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 \geq 1, \\ 3x'_1 + x'_2 + 2x'_3 \geq 1; \\ x'_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3. \end{cases}$$

解这一组不等式, 使得目标函数

$$S(X'^*) = x'_1 + x'_2 + x'_3$$

达到极小.

解 i), 得到一组解

$$x_1' = \frac{1}{7}, \quad x_2' = 0, \quad x_3' = \frac{2}{7};$$

$$S(\mathbf{X}') = \frac{1}{7} + 0 + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V}.$$

所以对策的值是

$$V = \frac{7}{3}.$$

又代回原式, 求得

$$x_1^* = V x_1' = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$x_2^* = V x_2' = \frac{7}{3} \times 0 = 0,$$

$$x_3^* = V x_3' = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{3}.$$

因此, 局中人 I 的最优策略是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right).$$

同样, 解另一组不等式

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} y_1' + 3y_2' + 3y_3' \leq 1, \\ 4y_1' + 2y_2' + y_3' \leq 1, \\ 3y_1' + 2y_2' + 2y_3' \leq 1, \\ y_j' \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

解得

$$y_1' = \frac{1}{7}, \quad y_2' = \frac{1}{7}, \quad y_3' = \frac{1}{7}.$$

目标函数

$$S(\mathbf{Y}') = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} = \frac{1}{V},$$

所以有

$$V = \frac{7}{3}.$$

又因为

$$y_1^* = V \cdot y_1'^* = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$y_2^* = V \cdot y_2'^* = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

$$y_3^* = V \cdot y_3'^* = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3},$$

因此局中人 II 的最优策略为

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

综合上述结果, 即知给定这个矩阵对策的解是

$$\mathbf{X}^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right),$$

$$\mathbf{Y}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

$$V = E(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) = \frac{7}{3}.$$

六、矩阵对策的图解法

这里, 我们通过例题, 介绍一种求矩阵对策最优策略的图解法. 理论方面的证明, 本书从略.

[例 1] 给定一个矩阵对策 Γ , 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 9 & 10 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值.

解 假定局中人 I 采用的混合策略为

$$X = (x, 1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

于是, 当局中人 II 采用 β_1 时, 局中人 I 的赢得是

$$2x + 9(1-x) = 9 - 7x;$$

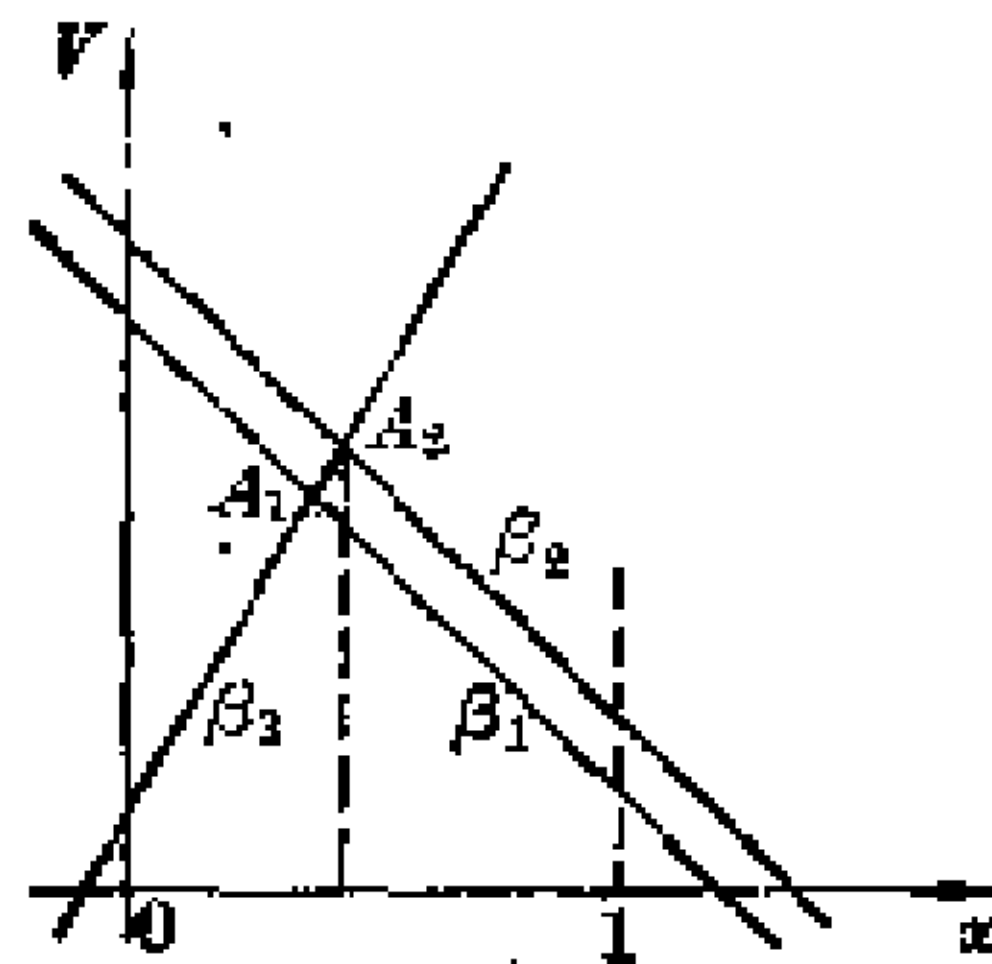
如果局中人 II 采用 β_2 时, 局中人 I 的赢得是

$$3x + 10(1-x) = 10 - 7x;$$

如果局中人 II 采用 β_3 时, 局中人 I 的赢得是

$$12x + 2(1-x) = 2 + 10x.$$

现在, 用所得的三个方程, 于区间 $[0, 1]$ 上作出三条直线:



显然, 对局中人 I 来说, 他希望取到尽可能大的值. 而在交点 A_1 与 A_2 处, 显然 A_2 处取到的 V 比 A_1 处要大. 实际上, 局中人 I 的最优策略是由以下方程组所得到:

$$\begin{cases} 9 - 7x = V, \\ 2 + 10x = V, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

解上方程组, 得

$$x = \frac{7}{17}, \quad V = 6 \frac{2}{17}$$

于是, 局中人 I 的最优策略是

$$X^* = \left(\frac{7}{17}, \frac{10}{17} \right)$$

对局中人 II 来说, 由于 β_1 对应的直线完全落在 β_2 对应

的直线之下，因此取 β_2 的概率就是 0，即 $y_2=0$ 。所以，求局中人 II 的最优策略，可以由以下的矩阵中求得：

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

在不等式组中，我们取等号，则有

$$2y_1 + 12(1 - y_1) = 6 \frac{2}{17},$$

$$0 \leq y_1 \leq 1.$$

于是，求得

$$y_1 = \frac{10}{17}.$$

从而有

$$y_3 = \frac{7}{17}.$$

所以，局中人 II 的最优策略是

$$Y^* = \left(\frac{10}{17}, 0, \frac{7}{17} \right).$$

【例 2】 给定矩阵对策 Γ ，矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求最优策略与值。

解 假定局中人 I 的混合策略为

$$X = (x, 1-x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

于是，当局中人 II 分别采取 β_1 , β_2 与 β_3 时，局中人 I 的赢得分别是

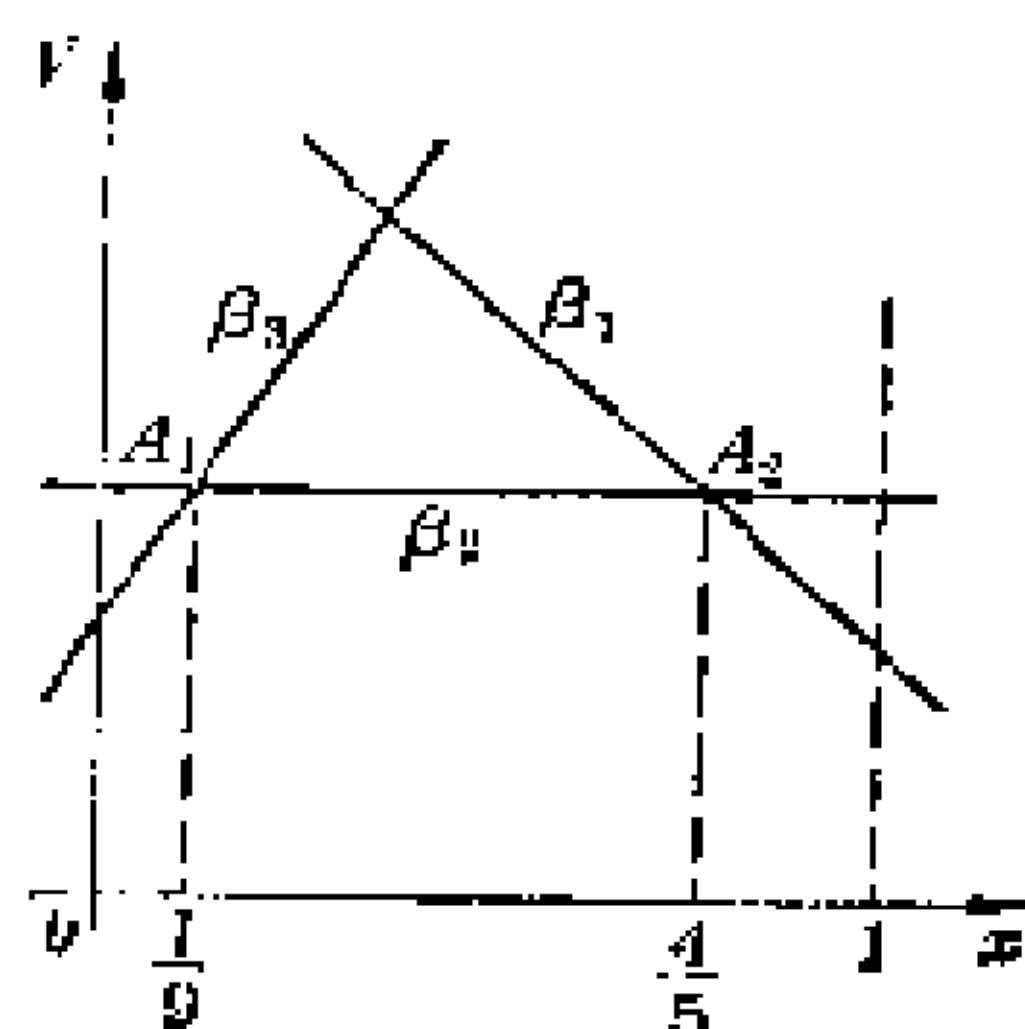
$$2x + 7(1-x) = 7 - 5x \geq V,$$

$$3x + 3(1-x) = 3 \geq V,$$

$$11x + 2(1-x) = 2 + 9x \geq V;$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

我们取等号, 分别划出三条直线如下:



很快就得到

$$x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right].$$

说明 x 为 $\left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right]$ 内任意点, 都是局中人 I 的最优策略, 即

$$X^* = (x, 1-x), \quad x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{5} \right].$$

而局中人 II 的最优策略, 应由下方程组求得:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 11(1-y_1-y_2) \leq 3, \\ 7y_1 + 3y_2 + 2(1-y_1-y_2) \leq 3. \end{cases}$$

对此方程组取等号, 可解得:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{31}{31} = 1, \quad y_3 = 0.$$

于是, 局中人 II 的最优策略是

$$Y^* = (0, 1, 0).$$

由于 $y_2 = 1$, 可知有 $3 \cdot 1 \leq V$, 又由第一个方程组中的第 2 个式子, 可知 $3 \geq V$, 于是对策的值 $V = 3$.

从刚才的两个例题可以看到, 对于 $A_{2 \times m}$ 的矩阵, 方法是一样的. 这里仅就 $A_{m \times 2}$ 或 $A_{2 \times m}$ 的情况给出了说明, 至于一般形式的 $A_{m \times n}$, 这里不加讨论, 因为高于三维空间的图是画不出的.

练 习 题

1. 求下列矩阵的 $\min_j \max_i a_{ij}$ 以及 $\max_i \min_j a_{ij}$:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 求给定矩阵对策的最优策略与值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 31 \\ 30 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 12 \\ 10 & 32 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 2 & 20 & 10 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 19 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix};$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. 假定要用某台机床加工大、中、小三种零件, 每一种工件都有两道工序, 现在要考虑如何进行加工, 能使消耗费用最省?

这个问题可以看成是一个矩阵对策, 假定局中人 I 是机床, 局中人 II 是加工零件, 局中人 I 有两个策略 x_1 与 x_2 :

x_1 : 每一个工件两道工序都加工完后, 再加工另一个工件;

x_2 : 将所有工件的第一道工序都加工完, 再加工所有工件的第二道工序,

局中人 II 有三个策略.

y_1 : 加工大工件;

y_2 : 加工中等工件;

y_3 : 加工小工件.

按如下的矩阵表示 I 的赢得:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ y_1 & \begin{pmatrix} -100 & -200 \end{pmatrix} \\ y_2 & \begin{pmatrix} -85 & -98 \end{pmatrix} \\ y_3 & \begin{pmatrix} -95 & -90 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

求这个对策的值并求最优策略.

4. 设甲乙两国进行乒乓球团体赛, 每队由三个人组成一个队参加比赛. 甲的人员可组成 4 个队, 乙的人员可组成 3 个队. 根据以往的比赛记录, 可知各种组成队法, 相遇会反映在下面的矩阵里 (代表甲的得分):

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{第一队} & \text{第二队} & \text{第三队(乙)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{第 1 队} \\ \text{第 2 队} \\ \text{第 3 队} \\ \text{第 4 队} \end{matrix} \text{ (甲)} & \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & -9 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

问双方由哪个队上场是不冒风险的作法?

5. 求给定矩阵对策在混合扩充后的最优策略和值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 18 & 6 & -12 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 13 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(8) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(注意: (7) 与 (8) 的解之间有何关系)

6. 用简便方法,求给定矩阵对策的解与值,已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 4 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}; \quad (4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. 某厂加工一批控制柜,想在包装、发运上节省些时间。按往常情况下可有四种包装方法,分①②③④四种;运输上也有三种运输的方法,分⊖⊕⊗三种。由于包装的简易关系,运输的损坏程度,统计规律可见下表

	⊖	⊕	⊗
①	2	3	4
②	1	-7	-8
③	-1	16	-9
④	0	-3	5

有的人向调度提议采用③种包装法,希望能得到⊖种运输方法。可是调度没有采纳这种意见,而是采用了①的包装法。问①包装法好的理由何在?

8. 证明下列各题:

(1) 如果给定对策的赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

求证: 1° 对策的值是 0; 2° 如 (X^*, Y^*) 是解,那么 (Y^*, X^*) 也是其解。

(2) 把上题的结论推广到一般: 如果赢得矩阵 A 是主对角线为 0 的反对称矩阵,即 $a_{ii}=0$, 当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = -a_{ji}$, 求证: 1° 对策的值是 0; 2° 如 (X^*, Y^*) 是解,那么 (Y^*, X^*) 也是其解。

(3) 给定两个对策,其赢得矩阵分别为 $A_{m \times n} = (a_{ij})$ 和 $B_{m \times n} = (ka_{ij})$, 其中 $k > 0$ 。证明: 这两个对策具有相同的最优策略,且它们的值之间具有关系 $kV_A = V_B$ 。

9. 用线性规划的方法,求下列矩阵对应的对策的解与值:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. 用图解法, 求给定矩阵对策的解与值, 已知赢得矩阵是:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. 证明下列各题:

(1) 给定一矩阵对策, 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

证明这一对策有解, 且其解是唯一确定的; 然后求出其解与值. 其中 $a > b > c > 0$.

(2) 给定一矩阵对策, 其赢得矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

证明这一对策有唯一解. 其中 $a > 0$.

(3) 给定两个矩阵对策, 其赢得矩阵分别为

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这两对策是否有相同的解? 为什么?

(4) 一个 m 阶方阵, 它的每一行与每一列的元素都是由 1 到 m 的正整数组成的, 这样的矩阵称为拉丁方阵. 证明: 如果一个矩阵对策的赢得矩阵为 m 阶拉丁方阵时, 这一对策的值就是 $V = \frac{m+1}{2}$.

12. 设 K 方用两个步兵营去夺取 C 方的某个据点, 每一个营都可以沿道路 I 与 II 中任何一条去攻取. C 方用三个步兵营守自己的据点, 可以用任何方式将三个营分配于道路 I 与 II 上去. 如果在道路上 K 方一个营与 C 方一个营相遇, 经过战斗, 这时 K 方胜 C 方占领据点的概率为 p_1 , 败于 C 方而撤退的概率为 $1-p_1$. 如果在道路上 K 方两个营与 C 方两个营相遇开战, 这时 K 方胜 C 方攻取据点的概率为 p_2 , 败的概率为 $1-p_2$. 如果 K 方被 C 方三个营在同一处挡住, 则 K 方是当然败退. 这样一来, K 方有三个策略: K_1 ——两个营都沿 I 攻 C , K_2 ——两个营都沿 II 攻 C , K_3 ——每条道路上各配一个营攻. 而 C 方有四个策略, C_1 ——全部兵力守在 I 上, C_2 ——全部兵力守在 II 上, C_3 ——在 I 上部一个营, 在 II 上部两个营, C_4 ——在 I 上部两个营, 在 II 上部一个营. 于是对策的

矩阵为

$$\begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & p_2 \\ 1 & 0 & p_2 & 1 \\ 1 & 1 & p_1 & p_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

求双方的最优策略以及对策的值。

13. K 方派出两架轰炸机去袭击 C 方的某个设施, 每一架轰炸机都带有巨大的杀伤武器。只要有一架飞到目的地, 这个设施就肯定被摧毁。轰炸机可以从 I, II, III 三个方向任选一个方向接近目标。 C 方可以将高射炮配置在三个方面中的任何一个方面。 K 方有两个策略: K_1 ——两轰炸机各从一方接近目标; K_2 ——两架轰炸机从同一个方向接近目标。 C 方有三个策略, C_1 ——三个方面各配置一门炮; C_2 ——一个方面配置两门炮, 另一个方面配置一门炮, 第三个方面不配置炮; C_3 ——三门炮全配置在同一个方面上。其对策矩阵如下:

$$\begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

求双方的最优策略。

练习题答案

1. (1) $\min \max a_{ij} = 2, \max \min a_{ij} = 0$; (2) $\min \max a_{ij} = 3, \max \min a_{ij} = 1$; (3) $\min \max a_{ij} = 2, \max \min a_{ij} = 0$; (4) $\min \max a_{ij} = \max \min a_{ij} = 1$. 2. (1) $(\alpha_1, \beta_2), V = 10$; (2) $(\alpha_1, \beta_1), V = 11$; (3) $(\alpha_1, \beta_1), V = 4$; (4) $(\alpha_2, \beta_3), V = 3$; (5) $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), V = 1$; (6) $(\alpha_1, \beta_1), V = 1$; (7) $(\alpha_1, \beta_3), V = 2$; (8) $(\alpha_1, \beta_3), V = 2$. 3. $V = -100, (x_1, y_1)$. 4. 甲方第 2 队, 乙方第二队. 5. (1) $X^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), V = 1$; (2) $X^* = (0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}), Y^* = (0, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}), V = \frac{2}{3}$; (3) $X^* = (\frac{15}{31}, \frac{6}{31}, \frac{10}{31}), Y^* = (\frac{15}{31}, \frac{10}{31}, \frac{6}{31}), V = \frac{1}{31}$; (4) $X^* = (0, 0, 1), Y^* = (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}), V = 0$; (5) $X^* = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}), Y^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), V = 1$; (6) $X^* = (0, 1, 0), Y^* = (0, 0, 1, 0, 0), V = 2$; (7) $X^* = (\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}), Y^* =$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), V=3\frac{11}{13}; (8) \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), \mathbf{Y}^*=\left(\frac{6}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right), \\
& V=3\frac{11}{13}. 6. (1) \quad \mathbf{X}^*=\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \mathbf{Y}^*=\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), V= \\
& 4\frac{1}{2}; (2) \quad \mathbf{X}^*=\left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{Y}^*=\left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), V=\frac{16}{3}; (3) \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{2}{5}, \right. \\
& \left. \frac{3}{5}, 0\right), \mathbf{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), V=4; (4) \quad \mathbf{X}^*=(1, 0, 0), \mathbf{Y}^*=(1, 0, 0, 0), V=0. \\
& 9. (1) \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \mathbf{Y}^*=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), V=\frac{9}{2}; (2) \quad \mathbf{X}^*=\left(0, \frac{1}{3}, \right. \\
& \left. \frac{2}{3}\right), \mathbf{Y}^*=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), V=\frac{2}{3}. 10. (1) \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \mathbf{Y}^*=\left(0, \frac{9}{11}, \right. \\
& \left. \frac{2}{11}\right), V=\frac{49}{11}; (2) \quad \mathbf{X}^*=(x, 1-x), \text{ 其中 } \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{3}{5}, \mathbf{Y}^*=(0, 1, 0), V=4. \\
& 12. \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{1-p_1}{p_2-2p_1+2}, \frac{p_2}{p_2-2p_1+2}\right), \mathbf{Y}^*=\left(\frac{1}{2(2+p_2-2p_1)}, \right. \\
& \left. \frac{1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}, \frac{1+p_2-2p_1}{2(2+p_2-2p_1)}\right), V=\frac{p_2-p_1+1}{p_2-2p_1+2}. \\
& 13. \quad \mathbf{X}^*=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \mathbf{Y}^*=(0, 1, 0), V=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

